

Exercices préliminaires EM3 : Equations de Maxwell

Exercice 1 : Chauffage par induction

- 1** Voir la figure 1. En orientant l'axe z par rapport au courant i (règle de la main droite), le champ créé par le solénoïde s'écrit

$$\vec{B} = \mu_0 n i \vec{e}_z$$

avec n le nombre de spires par unité de longueur. L'expression est identique dans l'ARQS et en magnétostatique.

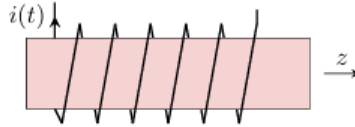


Figure 1 – Dispositif de soudure inductive.

- 2** L'équation de Maxwell-Faraday indique qu'un champ magnétique dépendant du temps est source de champ électrique. Au sein du métal, ce champ électrique va faire apparaître une densité de courant $\vec{j}$ et céder de l'énergie au métal par effet Joule.

Une autre justification moins orientée « équations » consisterait à dire que le métal est un conducteur placé dans un champ magnétique variable, et est donc le siège d'un phénomène d'induction. Ce sont les courants induits (les courants de Foucault) qui vont chauffer le matériau par effet Joule.

- 3** D'après l'équation de Maxwell-Faraday,

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 n \frac{di}{dt} \vec{e}_z = +\mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) \vec{e}_z$$

et en utilisant le formulaire

$$\text{rot } \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial r E_\theta}{\partial r} \vec{e}_z$$

d'où on déduit

$$\frac{\partial r E_\theta}{\partial r} = \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t).$$

En intégrant par rapport à r ,

$$r E_\theta = \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) \frac{r^2}{2} + f(t).$$

Comme on intègre une dérivée partielle pour laquelle certaines variables (ici t) sont fixées, alors la constante d'intégration est une « constante partielle », c'est-à-dire une fonction des variables fixées.

On montre que la fonction f est nulle en se plaçant en $r = 0$: comme il n'y a « rien de spécial » en ce point, la composante E_θ y prend une valeur finie. Finalement,

$$\vec{E} = \frac{1}{2} \mu_0 n r I_0 \omega \sin(\omega t) \vec{e}_\theta.$$

Exercice 2 : Manipulation des équations de Maxwell

1 Par définition,

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

ce qui est conforme à l'équation de Maxwell-Gauss car $\rho = 0$ par hypothèse. De même,

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0$$

ce qui est là aussi conforme à l'équation de Maxwell-Thomson.

2 Compte tenu de la forme des champs,

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = f'(z) e^{-t/\tau} \vec{e}_y \quad \text{et} \quad -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\tau} g(z) e^{-t/\tau} \vec{e}_y$$

d'où on déduit de l'équation de Maxwell-Faraday

$$f'(z) = \frac{1}{\tau} g(z)$$

3 Compte tenu de la forme des champs,

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = -g'(z) e^{-t/\tau} \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{1}{\tau} f(z) e^{-t/\tau} \vec{e}_x.$$

d'où on déduit de l'équation de Maxwell-Ampère

$$g'(z) = \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\tau} f(z) e^{-t/\tau}.$$

4 En dérivant par rapport à z l'équation obtenue par Maxwell-Faraday, on obtient

$$f''(z) = \frac{1}{\tau} g'(z)$$

et en combinant avec la question précédente on obtient

$$f''(z) - \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\tau^2} f(z) = 0.$$

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants portant sur la seule variable z . Son polynôme caractéristique admet pour racines

$$r_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon_0}{\tau^2}} = \pm \frac{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}{\tau}$$

└ Dans un cas aussi simple, pas besoin de passer par le discriminant !

La solution particulière est nulle et la solution homogène est

$$f(z) = \alpha \exp\left(-\frac{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}{\tau} z\right) + \beta \exp\left(\frac{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}{\tau} z\right)$$

Les conditions données par l'énoncé imposent que $\beta = 0$ et que $f(z=0) = E_0 = \alpha$. On en déduit :

$$\vec{E} = E_0 \exp\left(-\frac{1}{\tau} (t + \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} z)\right) \vec{e}_x.$$

5 D'après ce qui précède,

$$g(z) = \tau f'(z) = -E_0 \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \exp\left(-\frac{1}{\tau} (t + \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} z)\right)$$

d'où on déduit

$$\vec{B} = -E_0 \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \exp\left(-\frac{1}{\tau} (t + \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} z)\right) \vec{e}_y.$$